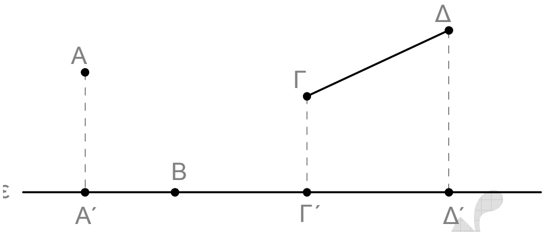
9.1 – 9.2
Μετρικές σχέσεις στο ορθογώνιο τρίγωνο

ΘΕΩΡΙΑ

1.

- Α΄ προβολή του Α στην ε
- Β προβολή του Β στην ε
- Γ΄Δ΄ προβολή του ΓΔ στην ε

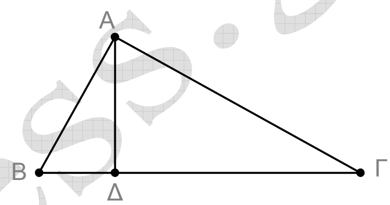


2.

Τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α και ΑΔ ύψος.

Τότε

- $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$
- $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$
- $\dfrac{AB^2}{A\Gamma^2} = \dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma}$
- $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ και αντίστροφα
- $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$
- $\dfrac{1}{\upsilon_\alpha^2} = \dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2}$
- Αν δίνονται δύο οποιαδήποτε από τα τμήματα του σχήματος, μπορούμε να υπολογίζουμε τα υπόλοιπα.



3.

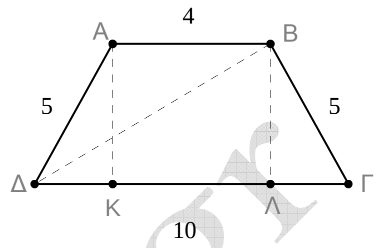
Το ύψος ορθογωνίου τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο τρίγωνα όμοια προς το αρχικό άρα και μεταξύ τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να υπολογίσετε το ύψος και τις διαγώνιες ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ = 4 , ΓΔ = 10 και μη παράλληλες πλευρές ίσες με 5 .

Λύση



Φέρνουμε τα ύψη ΑΚ και ΒΛ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΚ και ΒΛΓ είναι ίσα διότι

ΑΔ = ΒΓ υπόθεση , και

ΑΚ = ΒΛ κάθετα τμήματα μεταξύ παραλλήλων

Άρα ΔΚ = ΛΓ

ΑΚΛΒ ορθογώνιο $\Rightarrow$ ΚΛ = ΑΒ = 4

Αλλά $ΔΚ + ΚΛ + ΛΓ = 10$

$2ΔΚ + 4 = 10$

$ΔΚ = 3$

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΔΚ : $ΑΚ^2 = ΑΔ^2 - ΔΚ^2$

$ΑΚ^2 = 25 - 9$

$ΑΚ^2 = 16$

$ΑΚ = 4$

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΒΔΛ : $ΒΔ^2 = ΔΛ^2 + ΒΛ^2$

$ΒΔ^2 = 49 + 16 = 65$

$ΒΔ = \sqrt{65}$

2.

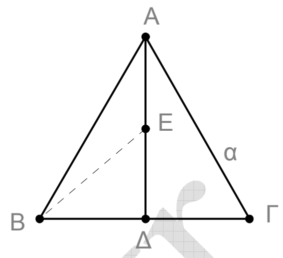
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$ πλευράς $α$. Να υπολογιστούν συναρτήσει του $α$

i) Το ύψος του

ii) Η απόσταση της κορυφής $Β$ από το μέσο της διαμέσου $ΑΔ$.

Λύση

i)



Έστω $ΑΔ$ διάμεσος και ύψος και $Ε$ το μέσο της

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΑΒΔ : $ΑΔ^2 = ΑΒ^2 - ΒΔ^2$

$$ΑΔ^2 = α^2 - \frac{α^2}{4}$$

$$ΑΔ^2 = \frac{3α^2}{4}$$

$$ΑΔ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$$

ii)

Αφού $ΑΔ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$, θα είναι $ΔΕ = \frac{α\sqrt{3}}{4}$

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΒΕΔ : $ΒΕ^2 = ΒΔ^2 + ΔΕ^2$

$$ΒΕ^2 = \frac{α^2}{4} + \frac{3α^2}{16}$$

$$ΒΕ^2 = \frac{7α^2}{16}$$

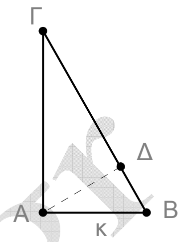
$$ΒΕ = \frac{α\sqrt{7}}{4}$$

3.

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ. Αν $\hat{B} = 60^0$ και $AB = \kappa$, να υπολογιστούν συναρτήσει του κ οι πλευρές του τριγώνου, οι προβολές των καθέτων πλευρών στην υποτείνουσα και το ύψος στην υποτείνουσα.

Λύση

Έστω ΑΔ το ύψος στην υποτείνουσα



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{\Gamma} = 30^o$,

άρα $AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow \kappa = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2\kappa$

Πυθαγόρειο στο τρ. ΑΒΓ : $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

$$4\kappa^2 = \kappa^2 + A\Gamma^2$$

$$A\Gamma = \kappa\sqrt{3}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\Delta\hat{A}B = 30^o$, άρα $\Delta B = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow \Delta B = \frac{\kappa}{2}$

$$\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 2\kappa - \frac{\kappa}{2} = \frac{3\kappa}{2}$$

$$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow A\Delta^2 = \frac{\kappa}{2} \cdot \frac{3\kappa}{2}$$

$$A\Delta^2 = \frac{3\kappa^2}{4}$$

$$A\Delta = \frac{\kappa\sqrt{3}}{2}$$

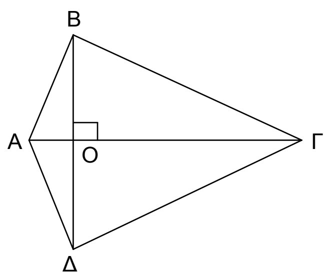
4.

Αν οι διαγώνιες ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι κάθετες, δείξτε ότι

$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2$$

Λύση

Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων



Τρ. ΑΟΒ : $AB^2 = AO^2 + BO^2$

Τρ. ΓΟΔ : $\Gamma\Delta^2 = \Delta O^2 + \Gamma O^2$

Προσθέτουμε κατά μέλη :

$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = AO^2 + BO^2 + \Delta O^2 + \Gamma O^2 \quad \textbf{(1)}$$

Τρ. ΓΟΒ : $\Gamma B^2 = BO^2 + \Gamma O^2$

Τρ. ΑΟΔ : $A\Delta^2 = AO^2 + \Delta O^2$

Προσθέτουμε κατά μέλη : $\Gamma B^2 + A\Delta^2 = BO^2 + \Gamma O^2 + AO^2 + \Delta O^2 \quad \textbf{(2)}$

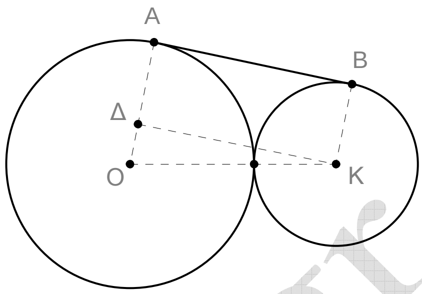
(1) , (2) $\Rightarrow AB^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2$

5.

Δύο κύκλοι (O, R) και (K, ρ) με $R > \rho$ εφάπτονται εξωτερικά. Αν AB είναι κοινό εφαπτομενικό τους τμήμα, να αποδείξετε ότι $AB = 2\sqrt{R\rho}$

Λύση

Φέρω την διάκεντρο ΟΚ, τις ακτίνες ΟΑ και ΚΒ και την $K\Delta \perp OA$



Το ΑΒΚΔ είναι προφανώς ορθογώνιο με

$AB = K\Delta$ και $A\Delta = KB = \rho$

Τότε $O\Delta = OA - A\Delta = R - \rho$

και προφανώς $OK = R + \rho$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔΓ έχουμε $\Delta K^2 = OK^2 - O\Delta^2$

$\Delta K^2 = (R + \rho)^2 - (R - \rho)^2$

$\Delta K^2 = 4R\rho$

$\Delta K = 2\sqrt{R\rho}$

Πρέπει να συσχετίσουμε τα ΑΒ, R, ρ

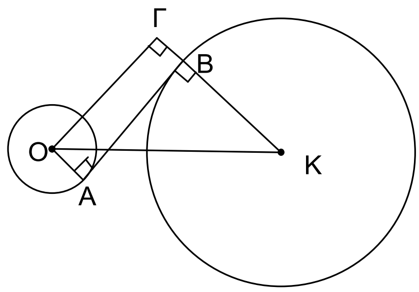
6.

Δύο κύκλοι (O, ρ) και $(K, 4\rho)$ έχουν διάκεντρο $\delta = 6\rho$. Να βρείτε το μήκος του κοινού εσωτερικού εφαπτόμενου τμήματος τους συναρτήσει του ρ.

Λύση

Έστω ΑΒ το κοινό εσωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων

Φέρω την $O\Gamma \perp KB$.



Τότε το ΟΑΒΓ είναι ορθογώνιο με

$AB = O\Gamma$ και $B\Gamma = OA = \rho$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΚ έχουμε ότι

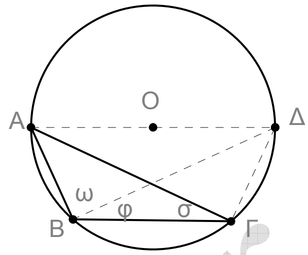
$O\Gamma^2 = OK^2 - K\Gamma^2 \Leftrightarrow O\Gamma^2 = 36\rho^2 - 25\rho^2 \Leftrightarrow O\Gamma = \rho\sqrt{11}$

Οπότε $AB = O\Gamma = \rho\sqrt{11}$

7.

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}-\hat{\Gamma}=90^0$. Αν R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου δείξτε ότι $AB^2+A\Gamma^2=4R^2$.

Λύση



Έστω Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου.

Φέρω τη διάμετρο ΑΟΔ.

Τότε $A\hat{B}\Delta=90^o$ σαν εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.

Όμως $A\hat{B}\Delta=\hat{B}-\varphi$, άρα $\hat{B}-\varphi=90^o$

Επειδή από την υπόθεση είναι $\hat{B}-\hat{\Gamma}=90^o$, θα ισχύει $\varphi=\hat{\Gamma}=\sigma$

Επομένως $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ άρα ΑΔ // ΒΓ, δηλαδή το τετράπλευρο ΑΔΓΒ είναι τραπέζιο και επειδή ΑΒ = ΓΔ θα είναι ισοσκελές.

Επομένως θα έχει ίσες διαγώνιες δηλαδή ΑΓ = ΒΔ

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $A\Delta^2=AB^2+B\Delta^2$

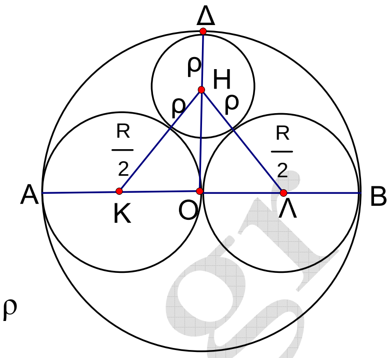
$$4R^2=AB^2+A\Gamma^2$$

Το $4R^2=(2R)^2$ = διάμετρος στο τετράγωνο, οδηγεί στο να φέρουμε βοηθητική διάμετρο

8.

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΟΒ και ακτίνας ΟΑ = R .
Με διαμέτρους τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ γράφουμε άλλα ημικύκλια εντός αυτού .
Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου που εφάπτεται των τριών ημικυκλίων συναρτήσει του R .

Λύση



Έστω (Η, ρ) ο κύκλος που εφάπτεται των τριών ημικυκλίων $\left(\text{K},\ \frac{R}{2}\right)$, $\left(\Lambda,\ \frac{R}{2}\right)$, (Ο, R) .

Φέρω τις διακέντρους ΚΛ , ΚΗ και ΗΛ καθώς επίσης και την ακτίνα ΟΔ

Το τρίγωνο ΗΚΛ είναι ισοσκελές με $HK = H\Lambda = \frac{R}{2} + \rho$ και η ΗΟ είναι διάμεσός του, άρα θα είναι και ύψος του.

Επομένως το τρίγωνο ΗΟΚ είναι ορθογώνιο στο Κ με πλευρές

$HK = \frac{R}{2} + \rho$, $KO = \frac{R}{2}$ και $OH = O\Delta - \Delta H = R - \rho$

Οπότε $HK^2 = HO^2 + KO^2 \Leftrightarrow \left(\frac{R}{2} + \rho\right)^2 = (R - \rho)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$

$$\frac{R^2}{4} + R\rho + \rho^2 = R^2 - 2R\rho + \rho^2 + \frac{R^2}{4}$$

$$3R\rho = R^2$$

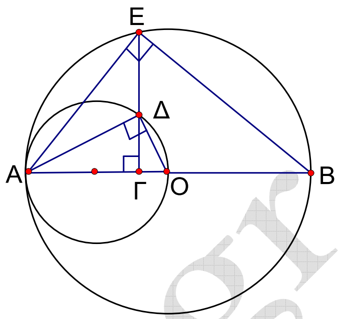
$$\rho = \frac{R}{3}$$

9.

Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και διάμετρος του ΑΒ . Με διάμετρο την ΟΑ γράφουμε κύκλο και από ένα σημείο Γ της ΟΑ φέρνουμε κάθετη στην ΑΒ που τέμνει τον μικρό κύκλο στο Δ και τον μεγάλο στο Ε. Δείξτε ότι $ΑΕ = \sqrt{2}\, ΑΔ$.

Λύση

Φέρω τις ΑΕ , ΕΒ , ΑΔ και ΔΟ



Επειδή η γωνία $Α\hat{Ε}Β$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο θα είναι ορθή.

Επομένως το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο και το ΕΓ είναι το ύψος στην υποτείνουσα

Από γνωστή μετρική σχέση έχουμε ότι

$ΑΕ^2 = ΑΒ \cdot ΑΓ \quad \Leftrightarrow \quad ΑΕ^2 = 2ρ \cdot ΑΓ$ **(1)**

Ομοίως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΟ έχουμε $ΑΔ^2 = ΑΟ \cdot ΑΓ \quad \Leftrightarrow$

$ΑΔ^2 = ρ \cdot ΑΓ$ **(2)**

Διαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη : $\dfrac{ΑΕ^2}{ΑΔ^2} = \dfrac{2ρ \cdot ΑΓ}{ρ \cdot ΑΓ} \quad \Leftrightarrow$

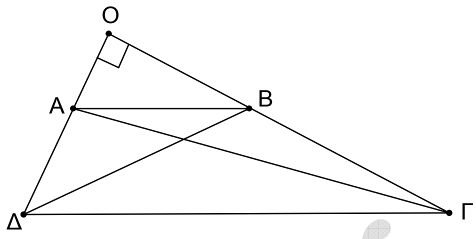
$$\frac{ΑΕ^2}{ΑΔ^2} = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$ΑΕ^2 = 2ΑΔ^2 \quad \Leftrightarrow \quad ΑΕ = ΑΔ\sqrt{2}$$

10.

Αν οι μη παράλληλες πλευρές ενός τραπεζίου είναι κάθετες , δείξτε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων του ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των βάσεων του .

Λύση



Έστω το τραπέζιο ΑΒΓΔ του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Ο και

έτσι ώστε $\widehat{O} = 90^o$

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΔΒ και ΟΑΓ

έχουμε $ΔB^2 = OΔ^2 + OB^2$ και $AΓ^2 = OA^2 + OΓ^2$

Προσθέτοντας κατά μέλη : $ΔB^2 + AΓ^2 = OΔ^2 + OB^2 + OA^2 + OΓ^2$ **(1)**

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ επίσης

έχουμε $AB^2 = OA^2 + OB^2$ και $ΔΓ^2 = OΔ^2 + OΓ^2$

Προσθέτοντας κατά μέλη : $AB^2 + ΔΓ^2 = OA^2 + OB^2 + OΔ^2 + OΓ^2$ **(2)**

Από τις (1) , (2) $\Rightarrow$ $ΔB^2 + AΓ^2 = AB^2 + ΔΓ^2$

11.

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα α, δείξτε ότι

i) $\beta\cdot\gamma = \alpha\cdot\upsilon_\alpha$

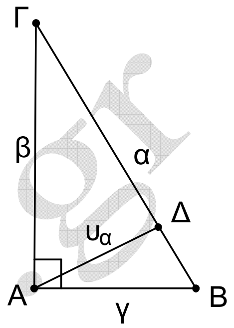
ii) $\beta + \gamma \le \alpha\sqrt{2}$

iii) $\alpha + \upsilon_\alpha > \beta + \gamma$

iv) Τα $\beta + \gamma$, υ_α , $\alpha + \upsilon_\alpha$ είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου .

Λύση

i)



$\beta\cdot\gamma = \alpha\cdot\upsilon_\alpha \iff \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\upsilon_\alpha}{\gamma}$ πράγμα που ισχύει διότι

τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΒ είναι όμοια αφού

$\Gamma\hat{A}B = A\hat{\Delta}B = 90^o$ και $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B$ σαν οξείες

με κάθετες πλευρές .

ii)

$\beta + \gamma \le \alpha\sqrt{2} \iff (\beta + \gamma)^2 \le 2\alpha^2$

$\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \le 2\alpha^2$

$\beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \le 2(\beta^2 + \gamma^2)$

$\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \ge 0$

$(\beta - \gamma)^2 \ge 0$ η οποία είναι προφανής

iii)

$\alpha + \upsilon_\alpha > \beta + \gamma \iff (\alpha + \upsilon_\alpha)^2 > (\beta + \gamma)^2$

$\alpha^2 + \upsilon_\alpha^2 + 2\alpha\upsilon_\alpha > \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma$

$\alpha^2 + \upsilon_\alpha^2 + 2\alpha\upsilon_\alpha > \alpha^2 + 2\beta\gamma$

$\upsilon_\alpha^2 + 2\alpha\upsilon_\alpha > 2\beta\gamma$ και με βάση το (i)

$\upsilon_\alpha^2 + 2\beta\gamma > 2\beta\gamma$

$\upsilon_\alpha^2 > 0$ η οποία είναι προφανής

iv)

Επειδή $\alpha + \upsilon_\alpha > \beta + \gamma$ και $\alpha + \upsilon_\alpha > \upsilon_\alpha$ η μεγαλύτερη πλευρά είναι η $\alpha + \upsilon_\alpha$.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $(\alpha + \upsilon_\alpha)^2 = (\beta + \gamma)^2 + \upsilon_\alpha^2$

$\alpha^2 + \upsilon_\alpha^2 + 2\alpha\upsilon_\alpha = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma + \upsilon_\alpha^2$

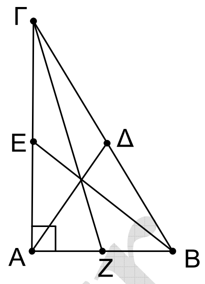
$\alpha^2 + \upsilon_\alpha^2 + 2\alpha\upsilon_\alpha = \alpha^2 + 2\beta\gamma + \upsilon_\alpha^2$

$\alpha\upsilon_\alpha = \beta\gamma$ η οποία ισχύει λόγω του (i)

12 .

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο δείξτε ότι , το άθροισμα των τετραγώνων των διαμέσων του ισούται με τα $\frac{3}{2}$ του τετραγώνου της υποτείνουσας .

Λύση



Έστω ΑΔ , ΓΖ και ΒΕ οι διάμεσοι του ορθογωνίου τριγώνου.

Τρ. ΓΑΖ : $\Gamma Z^2 = A\Gamma^2 + AZ^2 \Leftrightarrow$

$$\Gamma Z^2 = A\Gamma^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Gamma Z^2 = A\Gamma^2 + \frac{AB^2}{4} \quad \textbf{(1)}$$

Τρ. ΕΑΒ : $BE^2 = AB^2 + \frac{A\Gamma^2}{4}$ **(2)**

Είναι $A\Delta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow A\Delta^2 = \frac{B\Gamma^2}{4}$ **(3)**

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$ $\Gamma Z^2 + BE^2 + A\Delta^2 = A\Gamma^2 + \frac{AB^2}{4} + AB^2 + \frac{A\Gamma^2}{4} + \frac{B\Gamma^2}{4}$

$$= (A\Gamma^2 + AB^2) + \frac{AB^2 + A\Gamma^2}{4} + \frac{B\Gamma^2}{4}$$

$$= B\Gamma^2 + \frac{B\Gamma^2}{4} + \frac{B\Gamma^2}{4} = \frac{3}{2}B\Gamma^2 .$$

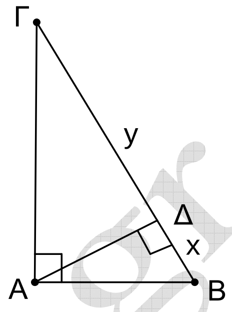
13.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$ ισχύει $\upsilon_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}$. Να βρείτε

i) Τα μήκη των προβολών των καθέτων πλευρών στην υποτείνουσα

ii) Τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$

Λύση



i)
Έστω ΒΔ = x και ΔΓ = y.

Είναι $xy = \upsilon_\alpha^2 \Leftrightarrow xy = \frac{3\alpha^2}{16}$ **(1)**

Ακόμα είναι και $x + y = \alpha$ **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των (1) , (2) βρίσκουμε

$\left(x = \frac{\alpha}{4} \text{ και } y = \frac{3\alpha}{4}\right)$ ή $\left(x = \frac{3\alpha}{4} \text{ και } y = \frac{\alpha}{4}\right)$

Επομένως οι προβολές των καθέτων πλευρών στην υποτείνουσα είναι $\frac{\alpha}{4}$ και $\frac{3\alpha}{4}$

ii)

Αν $B\Delta = \frac{\alpha}{4}$ τότε $\varepsilon\varphi B = \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}}{\frac{\alpha}{4}} = \sqrt{3}$, οπότε $\hat{B} = 60^o$ άρα $\hat{\Gamma} = 30^o$

Αν $B\Delta = \frac{3\alpha}{4}$ τότε, ομοίως βρίσκουμε, $\hat{B} = 30^o$ άρα $\hat{\Gamma} = 60^o$

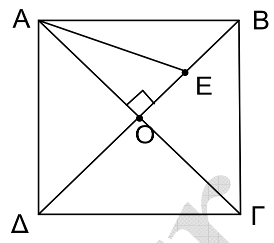
14.

Αν Ε είναι σημείο της διαγωνίου ΔΒ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ, δείξτε ότι

i) $ΑΒ^2 - ΑΕ^2 = ΕΒ \cdot ΕΔ$

ii) $ΒΕ^2 + ΕΔ^2 = 2ΑΕ^2$.

Λύση



i)

Φέρνω και την διαγώνιο ΑΓ, τότε $ΑΟ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ$

Τρ. ΑΟΒ : $ΑΒ^2 = ΑΟ^2 + ΒΟ^2 \Leftrightarrow$

$ΑΒ^2 = 2ΒΟ^2$ **(1)**

Τρ. ΑΟΕ : $ΑΕ^2 = ΑΟ^2 + ΟΕ^2 \Leftrightarrow$

$ΑΕ^2 = ΒΟ^2 + ΟΕ^2$ **(2)**

(1) – (2) $\Rightarrow$ $ΑΒ^2 - ΑΕ^2 = 2\,ΒΟ^2 - ΒΟ^2 - ΟΕ^2$

$ΑΒ^2 - ΑΕ^2 = ΒΟ^2 - ΟΕ^2$

$ΑΒ^2 - ΑΕ^2 = (ΒΟ - ΟΕ)\,(ΒΟ + ΟΕ)$

$ΑΒ^2 - ΑΕ^2 = (ΒΟ - ΟΕ)\,(ΔΟ + ΟΕ) \Leftrightarrow ΑΒ^2 - ΑΕ^2 = ΒΕ \cdot ΔΕ$

ii)

Είναι $ΒΕ^2 + ΕΔ^2 = (ΒΕ + ΕΔ)^2 - 2ΒΕ \cdot ΕΔ = ΒΔ^2 - 2ΒΕ \cdot ΕΔ$ **(3)**

Τρ. ΑΒΔ : $ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2 \Leftrightarrow$

$ΒΔ^2 = 2ΑΒ^2$

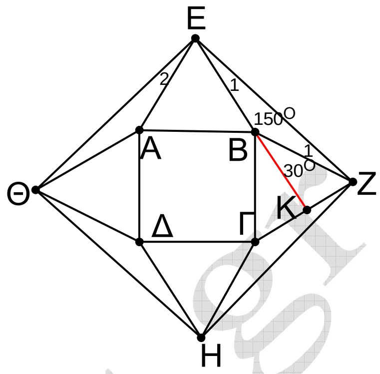
Η (3) γίνεται $ΒΕ^2 + ΕΔ^2 = 2ΑΒ^2 - 2ΒΕ \cdot ΕΔ$ και λόγω του (i)

$ΒΕ^2 + ΕΔ^2 = 2ΑΒ^2 - 2ΑΒ^2 + 2ΑΕ^2 = 2ΑΕ^2$

15.

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α . Εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ , ΒΓΖ , ΓΔΗ , ΔΑΘ . Δείξτε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο του οποίου η πλευρά ισούται με $\alpha\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Λύση



Τα τρίγωνα ΑΘΕ , ΕΒΖ , ΖΓΗ και ΗΔΘ είναι ίσα διότι π χ τα ΑΘΕ , ΕΒΖ δύο από αυτά, έχουν ΑΘ = ΑΕ = ΒΕ =ΒΖ = α και

$$\Theta\hat{A}E = E\hat{B}Z = 360^o - 90 - 60^o - 60^o = 150^o$$

Άρα ΘΕ = ΕΖ = ΖΗ = ΗΘ

Επειδή κάθε ένα από τα παραπάνω τρίγωνα είναι ισοσκελές με γωνία της κορυφής του 150^o, κάθε μία από τις προσκείμενες στην βάση του γωνίες θα είναι 15^o.

Έτσι λοιπόν πχ η γωνία $\Theta\hat{E}Z = \hat{E}_2 + A\hat{E}B + \hat{E}_1 = 15^o + 60^o + 15^o = 90^o$

Οπότε όλες οι γωνίες του ΕΖΗΘ είναι ορθές κατά συνέπεια αυτό είναι τετράγωνο.

Τώρα προεκτείνω την ΕΒ έως ότου τμήσει την ΓΖ σε σημείο Κ.

Επειδή η γωνία $E\hat{B}Z = 150^o$ θα είναι $K\hat{B}Z = 30^o$.

Επομένως η ΒΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Gamma\hat{B}Z$, άρα θα είναι και ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΖ.

Συνεπώς $EK = EB + BK = \alpha + \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΚΖ έχουμε ότι $EZ^2 = EK^2 + KZ^2$

$$= \left(\alpha + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$= 2\alpha^2 + \alpha^2\sqrt{3}$$

$$= \alpha^2(2 + \sqrt{3})$$

Άρα $EZ = \alpha\sqrt{2+\sqrt{3}}$